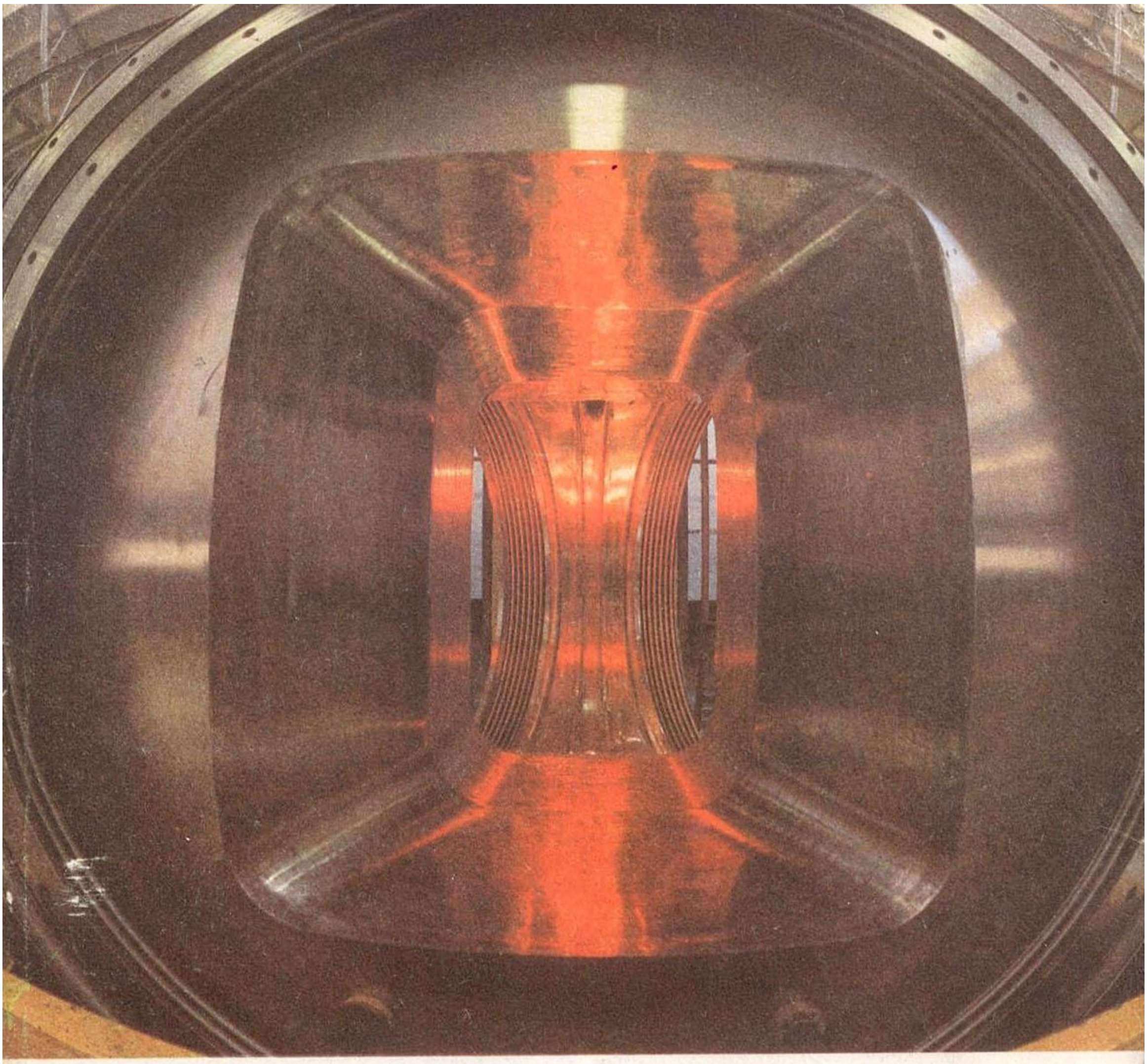


Токамак-15. Используя сверхпроводимость, физики приближаются к заветной цели — созданию термоядерного реактора.

НАУКА И ЖИЗНЬ

ISSN 0028-1263

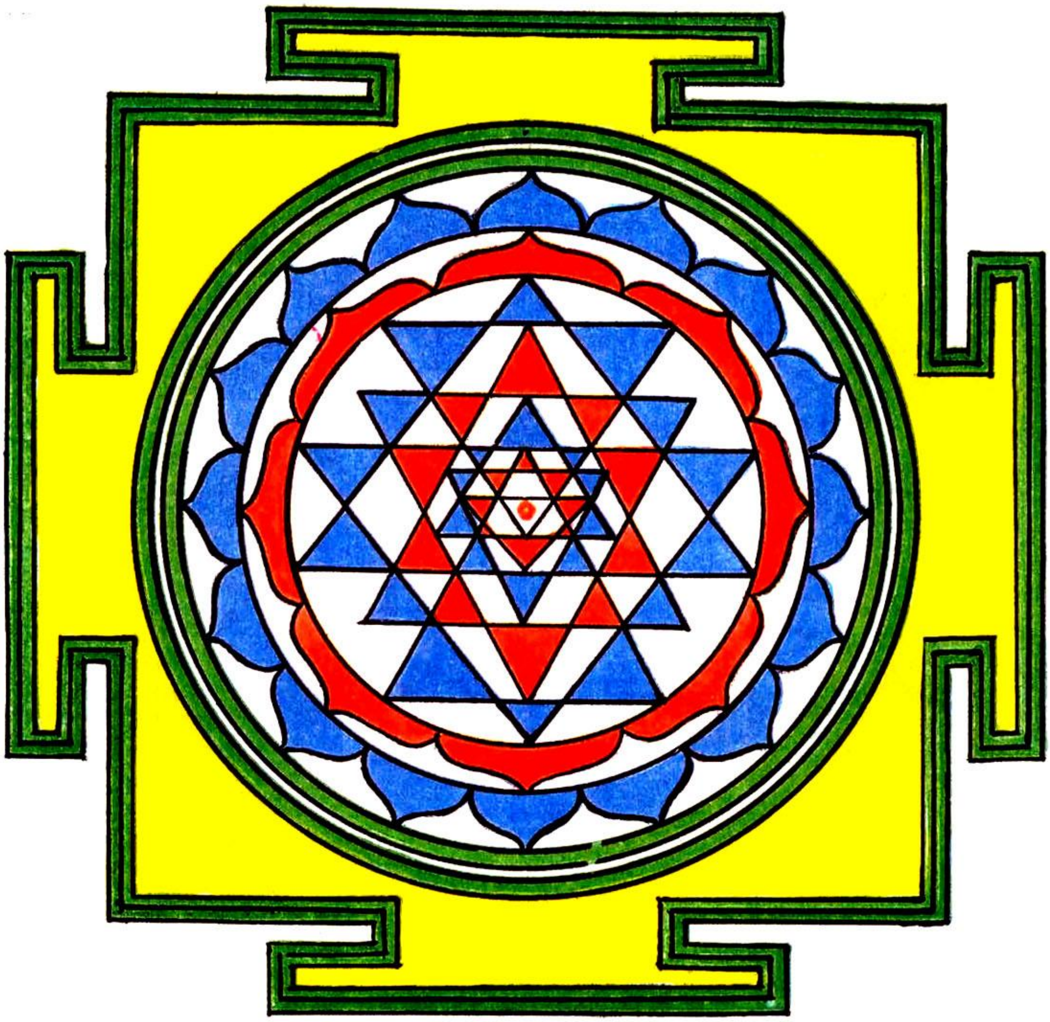
11

МОСКВА. ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРАВДА».

1987

Ленинград. 16 августа 1987 года. Крейсер «Аврора» следует к месту стоянки — причалу Петроградской набережной.

Великий Октябрь продолжается в наших делах сегодня. В стране развертывается перестройка, революционная по своей сути созидательная работа. Цель ее — ускорить прогресс социалистического общества.



● МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДОСУГИ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ГОЛОВОЛОМКИ ШРИ-ЯНТРЫ

Кандидат физико-математических наук А. КУЛАИЧЕВ.

Из древности до нас дошли свидетельства достаточно высокого уровня развития отдельных областей знания. Многие достижения того времени и сейчас продолжают оставаться неясными, не вполне укладывающимися в рамки существующих представлений о возможностях древних культур. До сих пор нас поражают такие сооружения, как Стонхендж мезоамериканские и египетские пирамиды, скульптуры острова Пасхи, а также многие другие объекты, имеющие более обозримый, «ручной» размер. К последнему классу объектов может быть отнесена Шри-янтра — древнеиндийское схематическое изображение, имеющее более чем двухтысячелетнюю историю существования.

Шри-янтра (рис. 1) состоит из центральной 14-угольной звезды или многоугольника, образованного пересечением девяти больших треугольников, порождающих, в свою очередь, 43 малых треугольника. Звезда заключена в два 8- и 16-лепестковых лотоса, которые объемлются четырьмя окружностями и обрамлением с четырьмя дверьми на четыре стороны света, так называемым «квадратом защиты». Каждый элемент Шри (или Великой) - янтры — большой и малый треугольник, лепесток лотоса, обрамляющая линия и т. д., связан с определенным аспектом древних космогонических представлений. В Индии и Тибете Шри-янтра до настоящего времени используется главным образом как ритуальная композиция. Упоминание о ней встречается уже в Атхарваведе — сборнике ритуальных формул и заклинаний, который в дошедшем до нас виде был оформлен около 12-го века до нашей эры на основании более древней устной традиции.

Чем же интересно начертание Шри-янтры? Обратимся к центральной звезде, которая привлекает красотой геометрического узора. При внимательном рассмотрении можно заметить, что каждая образующая прямая проходит через три, четыре, пять и даже шесть точек пересечения других линий. Тем самым при построении древним геометрам требовалось добиться того, чтобы точки пересечения лежали на одной прямой. При таком условии процесс построения всей звезды оказывается чрезвычайно трудоемким, выходящим за рамки возможностей ручных методов.

Чтобы убедиться в этом, не нужны сверхсложные технические средства и математические знания. Достаточно использовать всем доступные чертежные инструменты и построить копию приводимого здесь изображения с увеличением, например, в 5 раз, пользуясь карандашом, циркулем и линейкой. При этом необходимо добиться зрительно точного совпадения всех точек пересечения. Можно пользоваться миллиметровой бумагой и переносить размеры измерителем с их пропорциональным увеличением. Для чистоты эксперимента желательно приступить к решению головоломки, не читая последующего изложения.

В ходе решения выясняется, что некоторые линии можно провести независимо, исходно задаваясь их положением. Другие же проводятся однозначно по полученным точкам пересечения. В результате оказывается, что некоторые точки пересечения не совмещаются. При попытке ликвидировать эти расхождения появляются несоответствия в других точках и так далее до необозримости, не оставляя надежд на конечный успех. Уже на этом этапе многие могут потерять терпение.

Подскажем способ постепенного сокращения неточностей, использующий обнаруженное свойство разложения звезды Великой янтры на четыре структурных компонента.

Рассмотрим построение первого компонента (рис. 2) для одной из вертикально симметричных половин изображения звезды. Нарисовав внешнюю окружность, нанесем два симметричных больших треугольника, исходно задавшись некоторым положением их основания относительно центра, то есть ординатой Y_a. Выберем положение точки A′ на основании треугольника с вершиной вверху и проведем линию 1—A′ до пересечения с вертикальным диаметром, получив точку 2. Теперь проведем через точку 2 горизонталь до пересечения с внешним диаметром, получив точку D. Затем проведем прямую через точки 3—A′ до пересечения с внешней окружностью в некоторой точке D′, положение которой в общем случае отличается от положения точки D.

Перемещая точку A′, следует добиться возможно более точного совмещения точек D и D′. Для этого выбираем новое положение точки A′ и повторно проводим указанные построения. Для продолжения процесса необходимо пользоваться следующими правилами:

а) если в новом построении различие между точками D и D′ меньше, чем в первом построении, то следует двигать точку A′ в том же направлении;

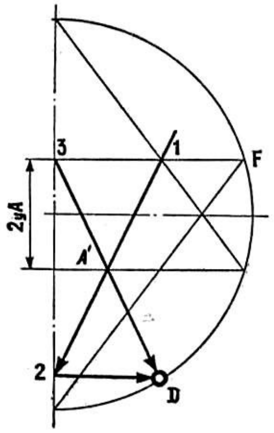
б) если в новом построении различие в положении точек D и D′ больше, чем в первом построении, то следует точку A′ сдвинуть в противоположном направлении;

в) если в новом построении точки D и D′ поменялись местами, то далее следует испытать промежуточное положение точки A′.

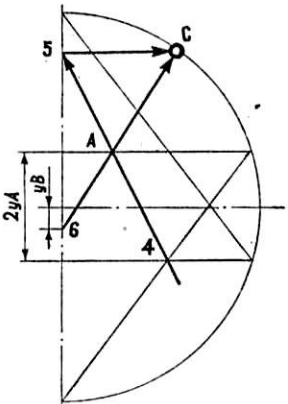
Приведенные правила — пример так называемого итерационного метода, или метода последовательных приближений, которые рассматриваются в вычислительной математике. Численные итерационные методы в отличие от аналитических методов решения простых алгебраических уравнений не обеспечивают получения абсолютно точного решения, но позволяют достигать достаточной точности за конечное число шагов. Наша же задача состоит всего лишь в достижении зрительно точного совмещения точек пересечения. При построении первого компонента мы фактически ищем приближенное значение абсциссы точки A′ то есть X_a, которая при заданном Y_a однозначно определяет его геометрию.

Итерационное построение второго структурного компонента (рис. 3) почти симметрично построению первого компонента и независимо от него в том смысле, что не используются результаты его построения. Отличие состоит в необходимости наряду с Y_a задаваться значением еще одного параметра $Y_в$, определяющего положение точки 6. Геометрия второго компонента при заданных Y_a и $Y_в$ определяется абсциссой точки A (X_a), приближенное значение которой находится во время построения, аналогичного вышерассмотренному.

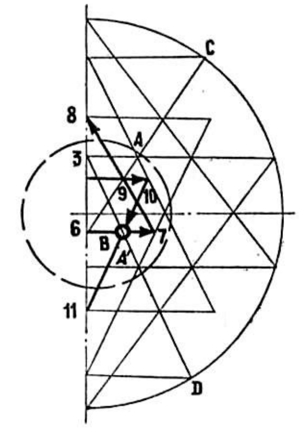
Третий структурный компонент (рис. 4) использует результаты построений первых двух, будучи внутренним по отношению к ним. Вначале проведем горизонталь через точку 6 и получим точку 7. Затем проведем прямую через точки 8—7, получив точку 9. Теперь проведем горизонталь через точку 9, получив точку 10. Далее, изменяя положение точки 6, то есть варьируя параметр $Y_в$, нужно добиться совмещения точек пересечения линий 6—7 и 10—11 с прямой 3 — D. Как можно заметить, здесь приходится варьировать параметр $Y_в$, который задавался при построении компонента 2. Тем самым на каждом шаге построения компонента 3 требуется выполнить полный цикл построений компонента 2.



Последовательность построения 1-го структурного компонента.



Последовательность построения 2-го структурного компонента.



Последовательность построения 3-го структурного компонента.

Построение четвертого компонента (рис. 5) преследует цель добиться соосности внутренней вписанной и внешней описанной окружностей за счет варьирования параметра Y_a, который исходно задавался при построениях первых трех компонентов. На каждом шаге построения компонента 4 требуется выполнить полные циклы построений компонентов 1, 2, 3.

Таким образом, для достижения достаточно точного построения звезды Шри-янтры необходимо выполнить итерационное построение четырех структурных компонентов. Возможность реализации такого построения ручными методами сомнительна, в чем можно убедиться, попытавшись выполнить его вручную.

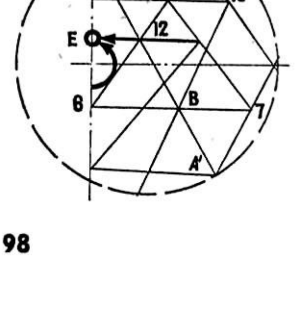
Очевидно, что рассмотренный процесс — единственный способ построения звезды Шри-янтры с направленным увеличением ее точности. Это следует из очевидной единственности разбиения звезды на четыре структурных компонента. Утверждение не касается деталей построения, которые могут различаться, например, порядком построения компонентов, параметрами, по которым оценивается точность построения, параметрами, выбираемыми в качестве варьируемых, и т. д. Однако из этого не следует ограничение свободы поиска «эвристических» способов начертания Шри-янтры.

Итак, геометрия звезды Великой янтры однозначно определяется набором значений четырех параметров Y_a, $Y_в$, X_a, $X_в$, или любым набором, эквивалентным данному. Остается неясным, знали ли в древности значения этих параметров, а если да, то как они были получены?

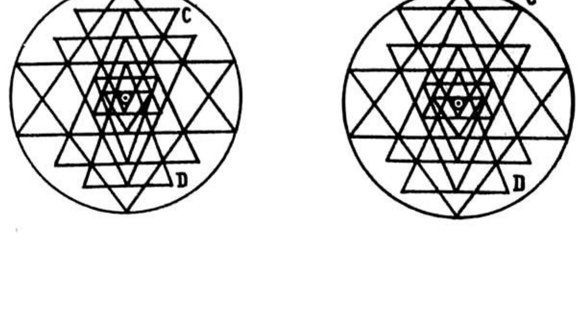
Каждый из указанных параметров мы связали с условием точности по координате некоторой точки. Тем самым звезда Шри-янтры получается жесткой, так как в ней не осталось ни одного свободного параметра. Если изготовить звезду из подвижно сочлененных стержней, то ее нельзя будет непрерывно деформировать, прикладывая усилие к какому-нибудь стержню. С другой стороны, подобно алгебраическому уравнению n-й степени, имеющему n корней, из которых некоторые могут быть действительными, а не мнимыми, звезда может допускать другие дискретные расположения, переходя из одного в другое как бы скачками. В этом плане итерационные методы являются «слепыми». Они позволяют найти одно из решений, на которое удастся случайно наткнуться. Но для того, чтобы найти все решения, итерационный метод надо направлять знанием границ расположения этих решений. Такое знание может быть получено только методами общего аналитического исследования.

Для общего аналитического исследования звезды

Последовательность построения 4-го структурного компонента.

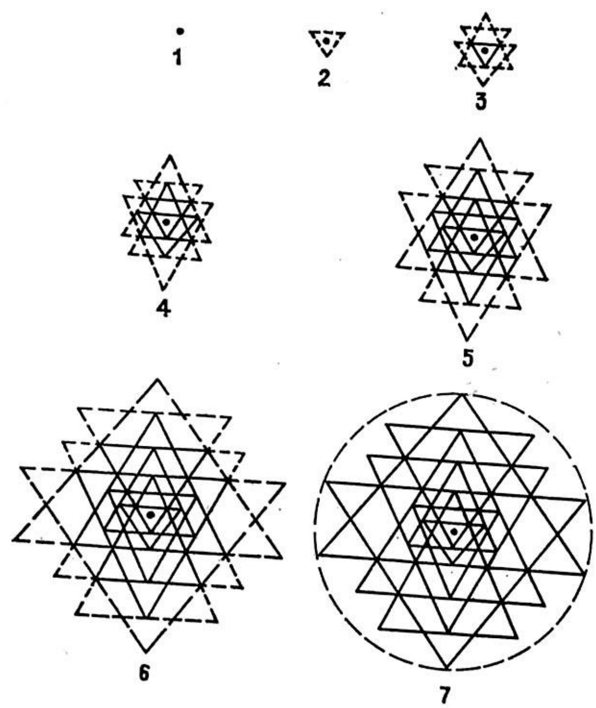


Варианты упрощенных изображений звезды Шри-янтры.



Шри-янтры необходимо составить ее алгебраическое описание. Поначалу данная задача кажется несложной, так как здесь требуется использовать известные еще из школьной математики уравнения прямой и окружности в декартовых координатах и выполнить элементарные приемы аналитических преобразований, связанных с приведением к общему знаменателю и избавлением от радикалов. Но уже на этом этапе мы сталкиваемся с ограниченностью человеческих возможностей. Отметим, что эффективных систем автоматизации сложных аналитических преобразований на доступных ЭВМ не существует, поэтому их, как правило, приходится выполнять вручную.

В целом звезда Шри-янтры описывается системой четырех нелинейных алгебраических уравнений от четырех неизвестных до 16-й степени по отдельным переменным и содержащих от 16 до 512 членов. Неутешительный вывод состоит в том, что трудоемкость алгебраического исследования системы выходит далеко за рамки возможностей компьютеров. Уровень современного научно-технического прогресса оказывается недостаточен для решения вопроса о числе различных расположений звезды Шри-янтры. Это тем более неожиданно, что с такими сверхсложными проблемами приходится сталкиваться при анализе графической схемы, происходящей из глубокой древности и образованной пересечением небольшого числа простейших геометрических фигур.



Последовательность эмпирического конструирования звезды Шри-янтры.

Так как же все-таки воспроизводилось изображение Шри-янтры на протяжении столетий? Частично на этот вопрос можно ответить. Наряду с рассмотренным имеются более простые изображения звезды, у которых точки C и D не фиксированы на внешней окружности (рис. 6), а нередко наблюдается и несоосность внутренней и внешней окружностей. Это значительно упрощает построение, исключает выполнение итерационных циклов по компонентам 1, 2 и 4. Подобные оригиналы более распространены. В одном средневековом манускрипте рекомендуется построение, состоящее в последовательном наращивании сторон фигуры, начиная с внутреннего малого треугольника (рис. 7). Однако оно, по-видимому, носит чисто умозрительный характер. Предлагаем читателям убедиться в том, что по данному методу (не пользуясь скрупулезным перенесением размеров) не удается получить сколько-нибудь сносного изображения звезды из-за лавинообразного нарастания погрешностей.

В другом трактате содержится набор инструкций чисто эвристического характера, которые сводятся к следующему: 1) проведите вертикальный диаметр на внешней окружности; 2) разделите диаметр на 48 равных частей; 3) проведите горизонтали звезды на уровне засечек с порядковыми номерами 6, 12, 17, 20; 23, 27, 30, 36, 42; 4) по полученным точкам достройте боковые стороны треугольников. Таким методом может быть получено удовлетворительное изображение звезды простейшего типа. Нетрудно убедиться, что даже в таком простом случае получаются существенные несоответствия ряда точек пересечения.

В отличие от рассмотренного «жесткого» типа звезды упрощенные варианты будут «мягкими», то есть допускающими непрерывное деформирование. Не исключено, что геометрическими преобразованиями этих типов изображений можно достигнуть некоторых «простых» соотношений между сторонами образующих треугольников, знание которых существенно упрощает процесс копирования. Исследование этих вопросов предлагается читателям в качестве геометрической головоломки.

Что касается существующих более сложных, чем описанная в статье, форм звезды Великой янтры, то вопрос о способах их воспроизведения остается открытым. Исторические сведения на этот счет отсутствуют.